3.5 La transformation de Fourier

On a vu dans le paragraphe précédent (voir théorème 3.4.5), que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$, est une base hilbertienne de $L^2([0,1],\mathbb{C})$, alors tout $f \in L^2([0,1],\mathbb{C})$, (de façon équivatente tout $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 1-périodique) est réprésenté par une série de fonctions trigonométriques,
$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n$, appelée série de Fourier de f.
La suite des coefficients de Fourier $\widehat{f}(n) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(t)e^{2i\pi nt}\,dt$, vérifie l'identité de Parseval $\int_0^1 |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$.

On souhaiterait La théorie des séries de Fourier s'applique aux fonctions périodiques ou de façon équivalente aux fonctions sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$, elle associe à une fonctions périodique une suite composée de ses coefficients de Fourier.

Dans cette partie, on développe un traitement traitement analogue, applicable à tout élément de l'espace de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On va commencer par associer à une fonction (intégrable), une autre fonction, qui est une "version continue" des coéfficients de Fourier.

3.5.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)e^{-2i\pi xy}| = |f(x)|$, d'où $\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-2i\pi xy}|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \|f\|_1 < +\infty$, on peut donc définir :

3.5.1 DÉFINITION

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle **transformée de Fourier** de f, la fonction $\widehat{f}$ définie par
$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$
2. La **transformation de Fourier** est l'application
$$\widehat{\ }: \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

3.5.2 REMARQUE

1. En utilisant $e^{-2i\pi xy} = \cos(2\pi xy) - i\sin(2\pi xy)$, on a les implications :
   (a) f est paire presque partout $\Rightarrow \widehat{f}(y) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi xy)\,dx$.
   (b) f est impaire presque partout $\Rightarrow \widehat{f}(y) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi xy)\,dx$.
2. On a $\overline{\widehat{f}}(y) = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x)e^{2i\pi xy}\,dx = \widehat{\overline{f}}(-y)$.

On commence par rappeler deux résultats de la théorie de l'intégration :

3.5.3 THÉORÈME (THÉORÈME DE LA CONVERGENCE DOMINÉE DE LEBESGUE)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient f_n, $n \in \mathbb{N}$, et f des fonctions mesurables sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que

1. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, presque partout sur U
2. il existe $g \in L^1(U, \mathbb{C})$ telle que $|f_n(x)| \leq |g(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, presque partout sur U.

Alors, $f \in L^1(U, \mathbb{C})$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.
En particulier, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_U f_n \, d\mu = \int_U f \, d\mu$.

3.5.4 THÉORÈME (THÉOREME DE FUBINI)
Soit $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable sur $U_1 \times U_2$, où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^{n_i}$. Alors

(i) les intégrales $\int_{U_1} \left(\int_{U_2} |f(x_1, x_2)| \, dx_2 \right) dx_1$ et $\int_{U_2} \left(\int_{U_1} |f(x_1, x_2)| \, dx_1 \right) dx_2$ sont de même nature.

(ii) Si l'une d'elle converge alors

$$\int_{U_1 \times U_2} f(x_1, x_2) \, d\mu = \int_{U_1} \left(\int_{U_2} f(U_1, U_2) \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{U_2} \left(\int_{U_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2.$$

Dans la partie qui va suivre on va énoncer les propriétés de base de la transformation de Fourier.

Propriétés de la transformée de Fourier

Les fonctions considérées dans cette section, seront dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\boxed{P_1}$ $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Démonstration: En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-2i\pi xy}| \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = \|f\|_1$. ∎

$\boxed{P_2}$ L'application $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue.

Démonstration: Soit (y_k) une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{k\to+\infty} f(x)e^{-2i\pi xy_k} = f(x)e^{-2i\pi xy}$, et comme $|f(x)e^{-2i\pi xy_k}| = |f(x)|$ est intégrable et ne dépend pas de y_k, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{k\to+\infty} \widehat{f}(y_k) = \widehat{f}(y)$. ■

3.5.7 LEMME (THÉORÈME DE RIEMANN-LEBESGUE)

$\boxed{P_3}$ Si $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors $\lim\limits_{|y|\to+\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

Démonstration: Soit $a < b$ et $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ alors pour $y \neq 0$ on aura

$$|\widehat{f}(y)| = \left|\int_a^b e^{-2i\pi xy}\,dx\right| = \left|\frac{1}{-2i\pi y}(e^{-2i\pi xb} - e^{-2i\pi xa})\,dx\right| \leq \frac{1}{\pi|y|}$$

d'où $\lim\limits_{|y|\to+\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

Alors, par linéarité de l'intégrale, cette propriété sera satisfaite par toute fonction en escalier, i.e. tout élément de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\mathbb{1}_{[a,b]} \mid a < b\}$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions en escaliers dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $g \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\mathbb{1}_{[a,b]} \mid a < b\}$ telle que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. D'après la propriété $\boxed{P_1}$, $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty \leq \|f-g\|_1 < \varepsilon$. D'où

$$|\widehat{f}(y)| \leq |\widehat{f}(y) - \widehat{g}(y)| + |\widehat{g}(y)| \leq \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty + |\widehat{g}(y)| \leq \varepsilon + |\widehat{g}(y)|.$$

En passant à la limite lorsque $|y|$ tends vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{|y|\to+\infty} |\widehat{f}(y)| < \varepsilon$, ε étant arbitraire ceci entraîne, $\lim\limits_{|y|\to+\infty} |\widehat{f}(y)| = 0$.

On peut résumer les propriétés $\boxed{P_1}$, $\boxed{P_2}$ et $\boxed{P_3}$ par

3.5.9 THÉORÈME

La transformation de Fourier $\widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est une application linéaire continue de norme ≤ 1 de $L^1(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$ dans $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \text{ continue et } \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0\}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

3.5.10 EXEMPLE. (i) Soit $a > 0$ et $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

Alors, si $y \neq 0$, $\widehat{f}(y) = \int_{-a}^a e^{-2i\pi xy}\,dx = 2\int_0^a \cos(2\pi xy)\,dx = 2\dfrac{\sin(2\pi ay)}{2\pi y}$

et $\widehat{f}(0) = \int_{-a}^a dx = 2a$. D'où $\widehat{f}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} & \text{si } y \neq 0 \\ 2a & \text{si } y = 0 \end{cases}$

(ii) $g(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.
Alors $\widehat{f}(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2i\pi xy}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+2i\pi y)}\,dx = \frac{1}{1+2i\pi y}$.

3.5.11 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur translation τ_a par :

$$\tau_a f(x) = f(x-a).$$

(b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On définit l'opérateur dilatation σ_λ par

$$\sigma_\lambda f(x) = f(\lambda x).$$

$\boxed{P_4}$ i. $\widehat{\tau_a f}(y) = e^{-2i\pi ay}\widehat{f}(y)$.

ii. $\widehat{\sigma_\lambda f}(y) = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{y}{\lambda})$.

Démonstration: i) .
$\widehat{\tau_a f}(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2i\pi xy}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2i\pi(x-a)y}e^{2i\pi ay}\,dx = e^{2i\pi ay}\int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2i\pi(x-a)y}\,dx = e^{-2i\pi ay}\widehat{f}(y)$.

ii) En utilisant le changement de variable $z = \lambda x$, on obtient
$\widehat{\sigma_\lambda f}(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)e^{-2i\pi xy}\,dx = \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-2i\pi z(\frac{y}{\lambda})}\,dz = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{y}{\lambda})$
■

$\boxed{P_5}$ i) Si $Id_{\mathbb{R}}.f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ est dérivable et

$$\left(\widehat{f}\right)'(y) = -2i\pi\widehat{(Id_{\mathbb{R}}.f)}(y).$$

ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{f'}(y) = (2i\pi y)\widehat{f}(y).$$

Démonstration: i) On a $\displaystyle\frac{\widehat{f}(y+h_n) - \widehat{f}(y)}{h_n} = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}\left(\frac{e^{-2i\pi xh_n}-1}{h_n}\right)dx$.
pose $f_n(x) = f(x)e^{-2i\pi xy}\left(\frac{e^{-2i\pi xh_n}-1}{h_n}\right)$.

Comme $\left|\dfrac{e^{-2i\pi x h_n}-1}{h_n}\right| = \left|-2i\pi x\displaystyle\int_0^1 e^{-2i\pi x h_n t}\,dt\right| \leq 2\pi|x|$, on aura $|f_n| \leq 2\pi|Id_{\mathbb{R}}.f|$ qui est, par hypothèse dans L^1. D'autre part, $\lim\limits_{h_n\to 0} f_n(x) = -2i\pi x f(x)e^{-2i\pi xy}$ presque partout. Alors, le théorème de la convergence dominée, donne

$$\left(\widehat{f}\right)'(y) = \lim_{h_n\to 0}\frac{\widehat{f}(y+h_n)-\widehat{f}(y)}{h_n} = \int_{\mathbb{R}}\lim_{h_n\to 0} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}(-2i\pi x)f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx$$

i.e. $\left(\widehat{f}\right)'(y) = -2i\pi\widehat{(Id_{\mathbb{R}}.f)}(y)$.

ii) Comme $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $f'\in L^1(\mathbb{R})$
$\lim_{|x|\to+\infty}|f(x)e^{-2i\pi xy}| = \lim_{|x|\to+\infty}|f(x)| = 0$ et une intégration par parties donne alors :

$$\widehat{f'}(y) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-2i\pi xy}\,dx = \lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}}\left[f(x)e^{-2i\pi xy}\right]_A^B + 2i\pi y\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx$$

D'où $\widehat{f'}(y) = 2i\pi y\widehat{f}(y)$.

Exemple fondamental : la gaussienne $e^{-\pi x^2}$

3.5.14 Lemme

$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$.

Démonstration: En effet, un changement de variable en coordonnées polaires donne

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2}\,r dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\left[\frac{e^{-\pi r^2}}{2\pi}\right]_0^{+\infty} = 1.$$ ■

3.5.16 Lemme

Si $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ alors : $\widehat{\phi} = \phi$

Démonstration: On a $\phi'(x) = -2\pi x\phi(x)$, d'où $\widehat{\phi'} = \widehat{-2\pi x\phi}$ ce qui donne $2i\pi y\widehat{\phi} = -i\widehat{\phi}'$. Ainsi $\widehat{\phi}$ est solution de l'équation différentielle, $-2\pi y\widehat{\phi} = i\widehat{\phi}'$ i.e. $\widehat{\phi}(y) = ce^{-\pi y^2}$, et $c = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$.
Donc, $\widehat{\phi}(y) = e^{-\pi y^2}$. ■

$\boxed{P_6}$ Si $f, g\in L^1(\mathbb{R})$, alors $f*g\in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f*g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$,
où $f*g = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)\,dz$ est le produit de convolution de f et g.

Démonstration: D'après l'inégalité de Young (voir 4.2.32) , $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, d'où $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a, à l'aide du théorème de Fubini,
$\widehat{f * g}(y) = \int_{\mathbb{R}} f * g(x) e^{-2i\pi xy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-z) g(z) e^{-2i\pi xy}\, dz\, dx$
$= \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2i\pi xz} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-z) e^{-2i\pi(x-z)y}\, dx \right) dz = \widehat{f}(y) \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2i\pi xz}) \, dz =$
$\widehat{f}(y)\, \widehat{g}(y)$. ■

$\boxed{P_7}$ (Formule de transfert) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x)\, dx$$

Démonstration: Comme $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ et $\widehat{g} \in C_0 \subset L^\infty(\mathbb{R})$, d'où $\widehat{f} g$ et $f \widehat{g} \in L^1$. Ainsi les deux intégrales sont bien définies.
Par le théorème de Fubini on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2i\pi zx}\, dz \right) g(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi zx}\, dx \right) dz = \int_{\mathbb{R}} f(z) \widehat{g}(z)\, dz.$$

3.5.2 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

On a définit la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ on rappelle que $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ ne sont pas comparable, ainsi la transformation de Fourier n'est définie que sur $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi xy}\, dx$ diverge pour tout $y \in \mathbb{R}$. Pour surmonter cette difficulté, on va utiliser la densité de $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et le théorème de prolongement des application uniformément continues (voir 4.2.34), on obtiendra un isomorphisme isométrique $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, appelé *transformation de Fourier-Plancherel.*

3.5.20 PROPOSITION
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, à support compact. Alors $\widehat{f}$ existe et

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\widehat{f}\|_2.$$

En particulier, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration: Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et à support compact, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [a,b]$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on aura $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.

On pose $g(t) = f((b-a)t + a)$, alors g est à support dans $[0,1]$ et d'après la propiété $\boxed{P_4}$

$$\widehat{g}(y) = \frac{e^{2i\pi a y}}{b-a}\widehat{f}\left(\frac{y}{b-a}\right)$$

D'où $|\widehat{g}(y)| = \frac{1}{b-a}|\widehat{f}\left(\frac{y}{b-a}\right)|$ et par suite

$$\|\widehat{g}\|_2^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}\left(\frac{y}{b-a}\right)|^2\, dy = \frac{1}{(b-a)}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(u)|^2\, du = \frac{1}{(b-a)}\|\widehat{f}\|_2^2.$$

D'autre part,

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f((b-a)t+a)|^2\, dt = \frac{1}{(b-a)}\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2\, du = \frac{1}{(b-a)}\|f\|_2^2$$

On est ainsi ramener à prouver la proposition pour $g \in L^2([0,1])$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|g(t)| = |e^{2i\pi x t}g(t)|$, et l'identité de Parseval nous donne,

$$\|g\|_2^2 = \int_0^1 |g(t)|^2\, dt = \int_0^1 |e^{2i\pi x t}g(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n+x)|^2.$$

En intégrant, sur $x \in [0,1]$, on obtient,

$$\|g\|_2^2 = \int_0^1 \|g\|_2^2\, dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n+x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\widehat{g}(x)|^2\, dx = \|\widehat{g}\|_2^2.$$

3.5.22 Lemme

$L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N > 0$ tel que

$$\int_{|x|>N} |f(x)|^2\, dx < \varepsilon^2.$$

On pose $f_N = f.\mathbb{1}_{[-N,N]}$. Alors, $f_N \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f - f_N\|_2 < \varepsilon$.
En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, $\int_{\mathbb{R}} |f_N(x)|\, dx \leq \sqrt{2N}\|f\|_2 < +\infty$ et $\|f - f_N\|_2^2 = \int_{|x|>N} |f(x)|^2\, dx < \varepsilon^2$. ∎

3.5.24 Théorème (Transformation de Fourier-Plancherel)
Il existe une unique application linéaire continue de $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, appelée transformation de Fourier-Plancherel, telle que

1. pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$
2. $\mathscr{F}$ est une isométrie i.e.pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, de façon équivalente pour f, g éléments de $L^2(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle \mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g)\rangle = \langle f, g\rangle$$

3. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f.\mathbb{1}_{[-n,n]}$.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\widehat{f_n} - \mathscr{F}(f)\|_2 \to 0$

Démonstration: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f.\mathbb{1}_{[-n,n]}$.

D'après la proposition précédente, pour tout $y \in \mathbb{R}$ $\widehat{f_n}(y) = \widehat{f.\mathbb{1}_{[-n,n]}}(y) = \int_{-n}^{n} f(x)e^{2i\pi xy}\,dx$ existe et

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f_n}(y)|^2\,dy = \int_{-n}^{n} |f(x)|^2\,dx.$$

D'autre part, pour $n \geq m$, on a

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2^2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2^2 = \|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-n}^{n} |f(x)|^2\,dx - \int_{-m}^{m} |f(x)|^2\,dx$$

ce qui entraîne que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ et donc converge, on définit alors

$$\mathscr{F}(f) := \lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}.$$

Comme $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, l'extension $\mathscr{F}$ de la transformation de Fourier est unique, linéaire et continue (voir 4.2.34).

Par continuité de la norme, on aura

$$\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \|\lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}\|_2 = \|\lim_{n\to+\infty} f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

3.5.3 Polynômes et fonctions d'Hermite

Posons $\varphi_0(x) = \mathrm{e}^{-2\pi x^2}$ *et constatons que pour tout entier* $n \geq 0$ *la dérivée nième de* φ_0 *est de la forme*

$$\varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{H}_n(x)\varphi_0(x)$$

où H_n *est un polynôme de degré* n*, appelé polynôme d'Hermite.*

3.5.26 PROPOSITION

La suite des polyômes d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_{n+1} = 4\pi x \mathrm{H}_n - \mathrm{H}_n'$,

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $4^n\pi^n$.

3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-2\pi x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{n!(4\pi)^n}{\sqrt{2}} & \text{si } n = m. \end{cases}$

Démonstration: 1) En effet, par définition,

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\left((-1)^n \mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-2\pi x^2}\right)' \mathrm{e}^{2\pi x^2} = -(-4\pi x \mathrm{H}_n(x) + \mathrm{H}_n(x)').$$

2) On a $H_0 = 1$, $H_1(x) = 2\pi x$ et la relation de récurrence donne facilement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(4\pi)^n$.

3) On pose $I_{m,n} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^m \varphi_n(x)dx$ où $\varphi_n(x) = \mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-2\pi x^2} = (-1)^n\varphi_0^{(n)}(x)$. On a $\varphi_n = -\varphi_{n-1}'$ pour tout $n \geq 1$. Pour tous entiers $m,\ n \geq 1$,

$$I_{m,n} = [-x^m\varphi_{n-1}(x)]_{-\infty}^{+\infty} + m\int_{\mathbb{R}} x^{m-1}\varphi_{n-1}(x)dx = mI_{m-1,n-1}.$$

Si $m < n$ on déduit par récurrence,

$$I_{m,n} = m!I_{0,n} = m!\int_{\mathbb{R}} \varphi_{n-m}(x)dx = 0$$

(car φ_{n-m} est la dérivée d'une fonction qui tend vers 0 en $\pm\infty$, d'où la nullité de l'intégrale). Donc φ_n est orthogonale aux monômes de degré $< n$; par suite, puisque H_m est combinaison linéaire de monômes de degrés $< n$ on aura

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-2\pi x^2}dx = 0.$$

On a aussi pour $m = n$

$$\int_{\mathbb{R}} x^n\varphi_n(x)dx = n!\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)dx = \frac{n!}{\sqrt{2}}$$

puisque H_n est un polyôme de degré n de coefficient dominant $4^n\pi^n$, on aura,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-2\pi x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_n(x)\varphi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 4^n\pi^n x^n\varphi_n(x)dx = \frac{n!4^n\pi^n}{\sqrt{2}}.$$

La proposition précèdente donne une suite orthonormée de fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$*, en posant* $h_n(x) = \frac{1}{c_n} H_n(x) e^{-\pi x^2}$ *pour tout* $n \geq 0$*, où* $c_n = \frac{n! 4^n \pi^n}{\sqrt{2}}$ *; ce sont* **les fonctions d'Hermite**. *En effet, d'après la proposition 3.5.26, quand* $m \neq n$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} h_m(x) h_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-2\pi x^2} dx = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 1 & si\ n = m. \end{cases}$$

3.5.28 THÉORÈME

La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration: Il suffit de montrer que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact telle que $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $x \mapsto g(x) e^{\pi x^2}$ est continue à support compact, il existe un polyôme P tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) e^{\pi x^2} - P(x)|^2 \, dx < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Alors

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - P(x) e^{-\pi x^2}|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x) - P(x) e^{-\pi x^2}|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - P(x) e^{-\pi x^2}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x) e^{\pi x^2} - P(x)|^2 e^{-2\pi x^2} \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x) e^{\pi x^2} - P(x)|^2 \, dx,$$

on aura

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - P(x) e^{-\pi x^2}|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ceci termine la démonstration puisque tout polynôme P est combinaison linéaire de polynômes d'Hermite et donc $P(x) e^{-\pi x^2}$ est une combinaison linéaire de fonctions d'Hermite. ∎

3.5.30 REMARQUE

Les fonctions d'Hermite sont des éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

3.5.31 PROPOSITION

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{h}_n = (-i)^n h_n$.

Démonstration: On a déja vu que $\widehat{h}_0 = h_0$. Supposons que $\widehat{h}_n = (-i)^n h_n$. Comme $h_n(x) = \dfrac{1}{c_{n+1}} \mathrm{H}_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-\pi x^2} = \dfrac{1}{c_{n+1}}(2\pi x h_n(x) - h_n'(x))$.
Alors $\widehat{h}_{n+1}(y) = \frac{1}{c_{n+1}}\left(2\pi \widehat{Id_{\mathbb{R}} h_n}(y) - \widehat{h_n'}(y)\right) = \frac{1}{c_{n+1}}\left(2\pi\left(\frac{1}{-2i\pi}(\widehat{h_n})'(y)\right) - 2i\pi y \widehat{h_n}(y)\right)$, d'où

$$\widehat{h}_{n+1}(y) = \frac{1}{c_{n+1}}\left(i(\widehat{h_n})'(y) - 2i\pi y \widehat{h_n}(y)\right) = \frac{(-i)^{n+1}}{c_{n+1}}\left(h_n'(y) - 2i\pi y h_n(y)\right) = (-i)^{n+1} h_{n+1}(y).$$

Puisque, l'image par la transformation de Fourier de la base hilbertienne $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base hilbertienne $((-i)^n h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit du théorème 3.5.24

3.5.33 COROLLAIRE
La transformation de de Fourier-Plancherel $\mathscr{F} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme isométrique et $\mathscr{F}^{-1} = \overline{\mathscr{F}}$ et $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(x) = f(-x)$
où $\overline{\mathscr{F}} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par $\overline{\mathscr{F}}(f) := \overline{\mathscr{F}(\overline{f})}$.

Démonstration: On a pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle f, h_n, \rangle h_n$ d'où

$$\mathscr{F}(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, h_n\rangle \widehat{h}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-i)^n \langle f, h_n\rangle h_n$$

et

$$\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f)) = \overline{\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}(f)})} = \overline{\mathscr{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (i)^n \overline{\langle f, h_n\rangle h_n}\right)} = \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} (i)^n (-i)^n \overline{\langle f, h_n\rangle h_n}} = f.$$

3.5.35 EXEMPLE. Soit $f = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Comme $\widehat{f}(y) = \frac{1}{1+2i\pi y} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.
La transformation de Fourier-Plancherel nous donne alors : $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(x) = f(-x)$ i.e.

$$\mathscr{F}(\widehat{f})(x) = \mathscr{F}\left(\frac{1}{1+2i\pi y}\right)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(iii) $h(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Alors $h(x) = xg(x)$, d'où

$$\widehat{h}(y) = \widehat{xg}(y) = \frac{-1}{2i\pi}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial y}(y) = \frac{-1}{2i\pi}\frac{-2i\pi}{(1+2i\pi y)^2} = \frac{1}{(1+2i\pi y)^2}.$$

3.5.36 COROLLAIRE
La transformation de Fourier $\widehat{\ }$: $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est injective.

Démonstration: Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} = 0$. Soit f_n une suite de fonctions continues à support compact, telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$. Comme $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ on aura $\|\widehat{f_n}\|_2 = \|f_n\|_2$, par suite $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = 0$.

Soit K un compacte de $\mathbb{R}$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\|f_n.\mathbb{1}_K\|_1 \le \|f_n\|_2.\|\mathbb{1}_K\|_2$$

et par passage à la limite on aura $f\mathbb{1}_K \equiv 0$ comme K est un compact arbitraire, ceci entraîne que $f = 0$. ■

3.5.38 REMARQUE
La transformation de Fourier $\widehat{\ }$: $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

En effet, soit $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} \star \mathbb{1}_{[-1,1]}$, alors

$$g_n = \mathscr{F}(f_n) = \mathscr{F}(\mathbb{1}_{[-n,n]}).\mathscr{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]}) = \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi x}.\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$$

d'où $\widehat{g}_n = \mathscr{F}(g_n) = f_n$.

Comme pour $x \in [0,\ \pi/2]$, $\dfrac{\sin(x)}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}$, on aura

$$\|g_n\|_1 \ge \frac{1}{\pi}\int_0^{1/4} |\frac{\sin(2n\pi x)}{x}|dx \ge \frac{1}{\pi}\int_0^{(n\pi/2)} |\frac{\sin u}{u}|du.$$

Cette denière intégrale tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ car la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable.

Maintenant, si la transformation de Fourier était surjective, comme elle est injective et que $L^1(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach, elle serait, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, un isomorphisme d'espace de Banach. En particulier, la réciproque serait continue, et il existerait $C > 0$ telle que, pour tout f de $L^1(\mathbb{R})$, on aurait $\|\hat{f}\|_\infty \ge \mathrm{C}\|f\|_1$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_1 \le C\|f_n\|_\infty \le 2C$, ce qui est absurde puisque $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_1 = +\infty$.

En fait on a le théorème d'inversion suivant :

3.5.39 THÉORÈME (THÉORÈME D'INVERSION)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ μ p.p.

3.5.40 COROLLAIRE
La transformation de Fourier $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est un monomorphisme d'algèbre de Banach, où $L^1(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|.\|_1$ et du produit de convolution, alors que $C_0(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$ et de la multiplication ordinaire.

3.5.41 EXEMPLE. Si $f(x) = e^{-|x|}$, alors $\widehat{f}(y) = \frac{2}{(1+4\pi^2 y)^2}$. Comme $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème d'inversion pour obtenir,

$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car, f est continue). En utilisant la parité de f, on obtient l'identité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cos(2\pi xy)}{1+4\pi^2 y^2}\, dy = \frac{e^{-|x|}}{4}$.

Transformation de Fourier en dimension quelconque

En suivant une démarche analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ où d est un entier positif. C'est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, que l'on note encore $\mathscr{F}$, telle que

$$\overline{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F} = Id,$$

et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{F}(f) = \hat{f}$ est définie par $\hat{f}(y) = \int f(x) e^{-2i\pi x.y}\, dx$,
où $x.y$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ des vecteurs x et y.

Pour tout d-uplet $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ la longueur de α, $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. On obtient de la même manière le formulaire de base,

$f(x)$	$\partial^\alpha f(x)$	$(f * g)(x)$	$f(x-a),\ \ a \in \mathbb{R}^d$	$f(\lambda x),\ \ \lambda \in \mathbb{R}^*$
$\hat{f}(y)$	$(2\, i\pi)^{\lvert\alpha\rvert} y^\alpha \hat{f}(y)$	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$	$\mathrm{e}^{-2i\pi y\cdot a}\hat{f}(y)$	$\dfrac{1}{\lvert\lambda\rvert^d}\hat{f}(\dfrac{y}{\lambda})$